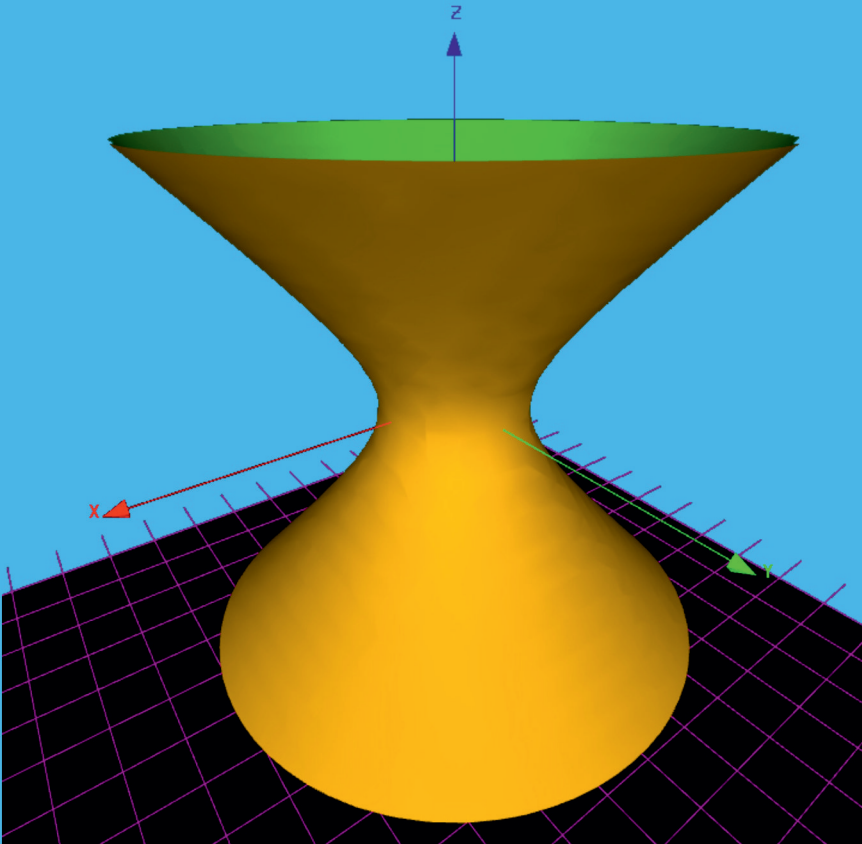


Darboux Ani Dönme Vektörleri ile SPACELIKE ve TIMELIKE YÜZEYLER GEOMETRİSİ

Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU

Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

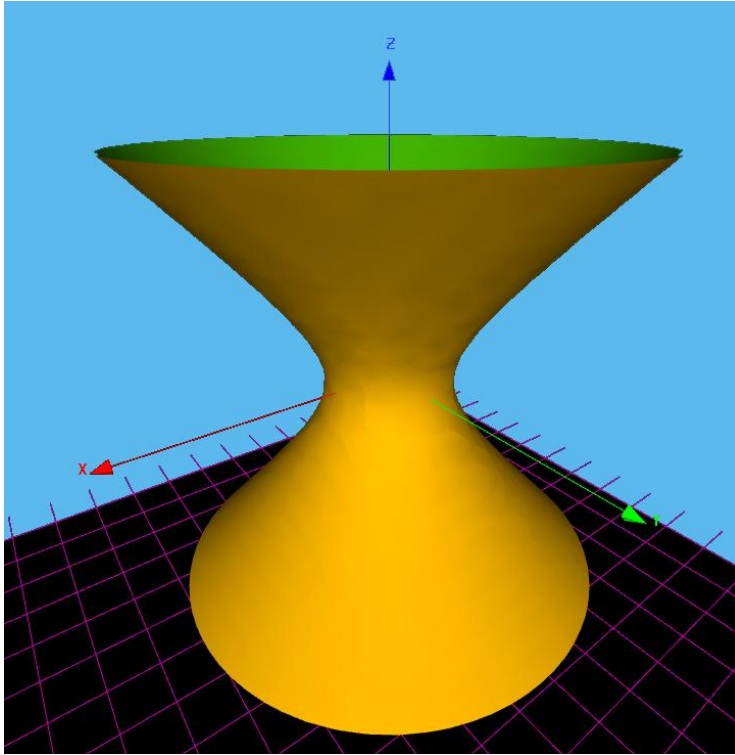


**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI
YAYIN NO: 0006**

Darboux Ani Dönme Vektörleri ile

SPACELIKE ve TIMELIKE YÜZEYLER GEOMETRİSİ

Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN



Celal Bayar Üniversitesi Yayınları
Yayın No: 0006

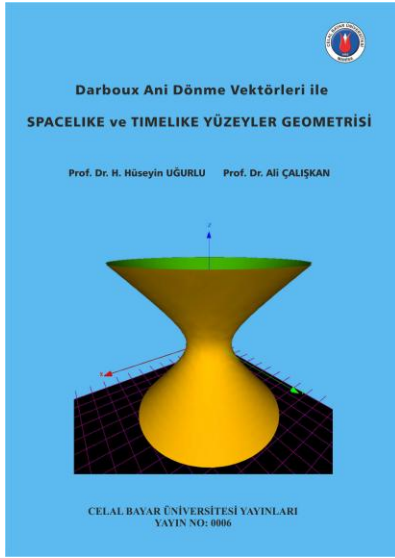
2012

Celal Bayar Üniversitesi Yönetim Kurulu'nun 2012/08 sayılı ve XV no'lu kararı ile basılmıştır.

**Darboux Ani Dönme Vektörleri ile
SPACELIKE ve TIMELIKE YÜZEYLER GEOMETRİSİ**

Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU
Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN
Ege Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü



Kapak Tasarım: Serat KOTAN
CBÜ Rektörlük Matbaası - 0236.237 28 86 / 1111

Baskı - Cilt : Celal Bayar Üniversitesi Rektörlük Matbaası -MANİSA

1. Baskı - 2012

ISBN: 978-975-8628-24-7

Bu kitabın Türkçe yayın hakları kitabın hukuki yayımcısına ait olup her hakkı saklıdır. Hiçbir bölümü ve paragrafı kısmen veya tamamen ya da özet halinde, fotokopi, faksimile veya başka herhangi bir biçimde çoğaltılamaz, dağıtılamaz yeniden elde edilmek üzere saklanamaz. Normal ölçüyü aşan iktibaslar yapılamaz ancak normal ve kanuni iktibaslarda kaynak gösterilmesi zorunludur.

ÖNSÖZ

E^3 3-boyutlu Öklid uzayındaki eğriler ve yüzeyler teorisi, uzun zamandan beri çok iyi bilinmektedir. R^3 3-boyutlu reel vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı yerine, $(+,+,-)$ işaretli Lorentz iç çarpımı alındığında, elde edilen uzay *Minkowski 3-uzay* olarak isimlendirilir ve R_1^3 ile gösterilir. Lorentz iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığı için, bu uzaydaki vektörler, eğriler ve yüzeyler çeşitlilik arzeder. Yani; spacelike, timelike ve lightlike (veya null) olmak üzere üç sınıfa ayrılırlar. Her sınıftaki kavram, diğer sınıftaki bir kavramdan çok farklıdır. Fakat; spacelike olan vektörler, eğriler ve yüzeyler, Öklid uzayındakiler ile büyük benzerlik taşırlar [1,2]. Timelike ve lightlike kavramları, Minkowski 3-uzayında Lorentziyen anlamdaki kavramlardır. Bu nedenle, R_1^3 uzayındaki çalışmalarda, bu iki kavram son derece önemlidir.

1. Bölüm; Lorentziyen iç çarpımı, Lorentziyen vektörel çarpımı [3] ve hiperbolik açı [4,5] gibi, Lorentz geometride yapı taşı olan temel kavramlar ve bunlarla ilgili özelliklere ayrılmıştır.

2. Bölüm; R_1^3 uzayındaki katı bir dik üçyüzlü, spacelike ve timelike eğriler için Frenet ve Darboux üçyüzlüleri ve bunların ani dönme vektörlerine ayrılmış olup, Frenet ve Darboux üçyüzlüleri arasındaki ilişkiyi veren bazı sonuçlar elde edilmiştir.

E^3 deki eğrilerin küresel göstergelerine [6] benzer olarak, spacelike ve timelike eğrilerin küresel göstergeleri, üçüncü bölümde incelenmiş ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Buna göre; bir spacelike veya future pointing timelike (c) eğrisine ait (c^*) sabit pol eğrisinin, S_1^2 Lorentziyen ve H_0^2 hiperbolik birim küreleri üzerinde iki tane küresel involütünün mevcut olduğu gösterilmiştir.

Gauss denkleminin küresel göstergelere uygulanması, dördüncü bölümde verilmiştir. Spacelike ve future pointing timelike eğrilerinin yay uzunlukları ile R_1^3 uzayına ve S_1^2 (veya H_0^2) küresine göre geodezik eğrilikleri elde edilmiştir.

5. bölümde ilk olarak; parametre eğrileri birbirine dik olan $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ spacelike yüzeyi, bu yüzey üzerindeki bir P noktası ve bu noktadan geçen keyfi bir (c) eğrisi göz önüne alınmıştır. (c) eğrisinin P deki geodezik eğriliği $\frac{1}{R_g}$, normal eğriliği $\frac{1}{R_n}$, geodezik burulması $\frac{1}{T_g}$,

teğet birim vektörü $\mathbf{t}$, yüzeyin normal birim vektörü $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{g} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}$ olmak üzere, $[\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{N}]$ Darboux üçyüzlüsü ve bu üçyüzlüye ait türev formüllerinden

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{t}}{T_g} - \frac{\mathbf{g}}{R_n} - \frac{\mathbf{N}}{R_g}$$

Darboux ani dönme vektörü tanımlanmıştır. P den geçen, (c_1) ve (c_2) ile gösterilen, $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ parametre eğrilerine karşılık gelen Darboux ani dönme vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{w}_1$ ve $\mathbf{w}_2$ ile gösterilmek üzere

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \cos \varphi + \mathbf{w}_2 \sin \varphi - \mathbf{N} \frac{d\varphi}{ds}$$

temel formülü elde edilmiştir. Burada φ , (c) ve (c_1) eğrileri arasındaki spacelike açı ve ds , (c) eğrisinin yay elemanıdır. Yukarıda verilen temel formül, spacelike yüzeyler teorisi için temel teşkil etmektedir. Çünkü; bu tür yüzeyler için bilinen; Euler, O. Bonnet, Enneper ve Liouville tarafından ifade edilen birçok önemli teorem, bu temel formülün sonuçları olarak ifade ve ispat edilmiştir. Spacelike yüzey üzerindeki Lorentziyen iç çarpım, Lorentziyen vektörel çarpım, (c) eğrisi için Darboux üçyüzlüsü, Darboux ani dönme vektörü ve temel formül, Öklidyen yüzeyler için bilinenlerden farklı olup, Öklidyen yüzeyler için bilinen teorem ve sonuçların [7,8] karşılıkları elde edilmiştir.

İkinci olarak; (c_1) ve (c_2) parametre eğrileri birbirine dik olan bir $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u, v)$ timelike yüzeyi, bu yüzeyin bir P noktası ve bu noktadan geçen keyfi bir (c) timelike eğrisi ele alınmıştır. (c) eğrisinin $[\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{N}]$ Darboux üçyüzlüsü ve bu üçyüzlüye ait türev formüllerinden,

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{t}}{T_g} + \frac{\mathbf{g}}{R_n} - \frac{\mathbf{N}}{R_g}$$

Darboux ani dönme vektörü tanımlanmıştır [9]. Buna bağlı olarak, timelike yüzeyin (c_1) timelike ve (c_2) spacelike parametre eğrilerine karşılık gelen *Darboux ani dönme vektörleri* de, sırasıyla,

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{(T_g)_1} - \frac{\mathbf{t}_2}{(R_n)_1} - \frac{\mathbf{N}}{(R_g)_1}, \quad \mathbf{w}_2 = -\frac{\mathbf{t}_2}{(T_g)_2} - \frac{\mathbf{t}_1}{(R_n)_2} + \frac{\mathbf{N}}{(R_g)_2}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu kesimin en orijinal tarafı, yukarıda spacelike yüzeyler için elde edilen temel formülün, timelike yüzeylerdeki karşılığı olan

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \cosh \theta + \mathbf{w}_2 \sinh \theta + \mathbf{N} \frac{d\theta}{ds}$$

formülünü kapsamaktadır. Burada; θ , (c) ve (c_1) timelike eğrileri arasındaki hiperbolik açı ve ds , (c) eğrisinin yay elemanıdır. Şu gerçeği de belirtelim ki; burada, (c) eğrisini spacelike olarak seçmek de mümkündür. Timelike yüzey üzerinde keyfi olarak seçilen (c) timelike eğrisi yerine, bu eğriye dik olan (c_0) spacelike eğrisi seçilirse, temel formül

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_1 \sinh \theta + \mathbf{w}_2 \cosh \theta + \mathbf{N} \frac{d\theta}{ds}$$

biçimine dönüşür. Bu formüller yardımıyla, yukarıda ifade edilen temel teoremlerin timelike yüzeyler için karşılıkları elde edilmiştir.

Spacelike ve timelike yüzeyler üzerindeki spacelike ve timelike eğriler için Darboux ani dönme vektörlerinin tanımlanması ve, hiperbolik ve spacelike açı kavramlarının zarif bir şekilde kullanılması, ispatlarda büyük kolaylık sağlamıştır.

Bu kitabın, Üniversitelerimizin Fen-Edebiyat (veya Fen) Fakültelerinin Matematik ve Fizik Bölümlerinde okuyan bütün öğrenciler ile Geometri Anabilim Dalında araştırma yapanlara yararlı olacağı ve yeni çalışmaların yapılmasına katkıda bulunacağı kanaatindeyiz.

Bu kitabın yazılmasında ve şekillerin çizilmesinde emeği geçen Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Kocayigit'e, Dr. Mehmet Önder'e, Öğr. Gör. Osman Kılıç' a, Öğr. Gör. Ali Topal'a, Arş. Gör. Burak Şahiner' e ve kitabın basımında büyük emeği geçen üniversitemiz matbaa müdürü Çetin Temiz ve personeline teşekkürü borç biliriz.

H. Hüseyin Uğurlu
Haziran 2012, Manisa.

Ali Çalışkan
Haziran 2012, İzmir.

Notasyonlar

E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
E^2	: Öklidyen düzlem
$\cdot$	: Öklid iç çarpımı
R_1^3	: 3-boyutlu Minkowski uzayı
$\langle , \rangle$	: Lorentziyen iç çarpımı
S_1^1	: Lorentziyen birim çember
H_1^1	: Hiperbolik birim çember
$A(\varphi)$	: E^2 deki dönme matrisi
$A(\theta)$	: R_1^2 deki dönme matrisi
$\ \ $	: R_1^3 uzayında norm
$x(u, v)$	: Space-like yüzey
$y(u, v)$	: Time-like yüzey
S_1^2	: Lorentziyen birim küre
S_1^{*2}	: Hareketli Lorentziyen birim küre
H_0^2	: Hiperbolik birim küre
H_0^{*2}	: Hareketli hiperbolik birim küre
$_{+}^2 H_0$	: Sağ hiperbolik küre
$_{-}^2 H_0$	: Sol hiperbolik küre
(c_1)	: $x(u, v)$ veya $y(u, v)$ üzerinde $u = \text{sabit}$ parametre eğrisi
(c_2)	: $x(u, v)$ veya $y(u, v)$ üzerinde $v = \text{sabit}$ parametre eğrisi
$\wedge$	: Işık konisi
(c)	: Keyfî eğri

(c_0)	: (c) ye dik olan eğri
$\mathbf{f}$	: Frenet ani dönme vektörü
$\mathbf{w}$	: Darboux ani dönme vektörü
D	: R_1^3 uzayının koneksiyonu
$\overline{D}$	: S_1^2 Lorentziyen birim kürenin koneksiyonu
$\overline{\overline{D}}$	: H_0^2 Hiperbolik birim kürenin koneksiyonu
(p)	: Sabit pol eğrisi
(p^*)	: Hareketli pol eğrisi
K	: Gauss eğriliği

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Giriş	1
1.2. R_1^2 uzayında açı kavramı	9
1.3. R_1^3 uzayında vektörel çarpım	17

2. BÖLÜM

SPACE LIKE ve TIME LIKE EĞRİLERİN ANİ DÖNME VEKTÖRLERİ

2.1. Katı bir dik üçyüzlünün ani dönme vektörü	22
2.2. Timelike eğriler için ani dönme vektörleri	24
2.3. Timelike asal normalli spacelike eğriler için ani dönme vektörleri	38
2.4. Timelike binormalli spacelike eğriler için ani dönme vektörleri	56

3. BÖLÜM

SPACELIKE ve TIMELIKE EĞRİLERİN KÜRESEL GÖSTERGELERİ

3.1. F.p.t.l. bir eğrinin küresel göstergeleri	74
3.2. F.p.t.l. asal normalli bir spacelike eğrinin küresel göstergeler	83
3.3. F.p.t.l. binormalli bir spacelike eğrinin küresel göstergeleri	84

4. BÖLÜM

GAUSS DENKLEMİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERE UYGULANMASI

4.1. F.p.t.l. eğriler	87
4.2. F.p.t.l. asal normalli spacelike eğriler	98
4.3. F.p.t.l. binormalli spacelike eğriler	108

5. BÖLÜM

SPACELIKE ve TIMELIKE YÜZEYLER GEOMETRİSİ

5.1. Spacelike yüzeyler geometrisi	119
5.2. Timelike yüzeyler geometrisi	142

Kaynaklar	168
İndeks	169

Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

1960 yılında Manisa'nın Kula ilçesine bağlı Gökçeören Nahiyesinde doğdu. 1983 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesinden mezun oldu. 1984 yılında Gazi Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesine Araştırma Görevlisi olarak atandı. Fen Bilimleri Enstitüsünde, 1987 yılında Yüksek Lisansını ve 1992 yılında da Doktorasını tamamladı. 1993 yılında, Celal Bayar Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalına Yrd. Doç. olarak atandı ve Matematik Bölümünü kurdu. 1997 yılında Doçent oldu. 2004 yılında, Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi OFMA Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim dalına Profesör olarak atandı. 04.02.2010 tarihinde, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından CBÜ Fen Edebiyat Fakültesi'ne Dekan olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.



Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

1949 yılında Çayıralan-Yozgat'ta doğdu. 1971 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Astronomi Bölümü'nden mezun olup, aynı Fakültenin Matematik Bölümünde Asistan olarak çalışmaya başladı. 1972 yılında bir yıl Belçika Liege Üniversitesi'nde araştırmacı asistan olarak çalıştı. 1975 yılında Yüksek Lisans Öğrenimini ve 1978 yılında Doktorasını tamamladı. 1982 yılında E.Ü.F.F. Matematik Bölümüne Yardımcı Doçent olarak atandı. 1984 yılında Doçent ve 1990 yılında da Profesör unvanını aldı. 1992-1993 de İngiltere'nin Warwick Üniversitesi'nde (Coventry) misafir profesör araştırmacı olarak bulundu. 1997-1999 yıllarında Süleyman Demirel Üniversitesi (Alma-Ata, Kazakistan) rektörü olarak görev yaptı. Halen Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı Başkanlığı görevini sürdürmektedir.



Bu kitapta, R^3 uzayındaki lightlike olmayan eğriler ve yüzeylerin geometrisi incelenmiştir. Uzay eğrilerinin Frenet çatılarının Frenet ani dönme vektörleri ve regüler yüzeyler üzerindeki eğrilerin Darboux çatılarının Darboux ani dönme vektörleri tanımlanmıştır. Bu vektörler yardımıyla regüler yüzeylerin geometrisi ile ilgili temel formüller bulunmuştur. Bu formüller, belirtilen yüzeyler için O. Bonnet, Euler ve Liouville Teoremleri başta olmak üzere, birçok teoremin ifade ve ispat edilmesinde temel oluşturlar.